Leçon 250 : Transformation de Fourier. Applications.

Développements :

Densité des polynômes orthogonaux, Théorème de Fourier-Plancherel.

Bibliographie :

Gasquet-Willem, Faraut, Candelpergher, Briane Pagès, Rudin, Ouvrard, Bernis.

Rapport du jury 2017 :

Cette leçon, reformulée pour la session 2017, offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect "séries de Fourier" n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; précisons aussi qu'il ne s'agit pas de faire de l'analyse de Fourier sur n'importe quel groupe localement compact mais bien sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$. La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1 . En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 sont attendues ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$, paraissent nécessaires. Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de Fourier envoie $S(\mathbb{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être données dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de Fourier de la valeur principale. La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telle que, par exemple, l'équation de la chaleur, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

Rapport de jury 2018 :

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect « séries de Fourier» n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de Fourier sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$. La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. En ce qui concerne la transformation de Fourier, elle ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de Fourier. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de Fourier doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir montrer le lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction intégrable. La formule d'inversion de Fourier pour une fonction L^1 dont la transformée de Fourier est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de Fourier à l'espace L^2 par Fourier-Plancherel. Des exemples explicites de calcul de transformations de Fourier, classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$, paraissent nécessaires. Pour aller plus loin, la transformation de Fourier des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Rappelons une fois de plus que les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de Fourier envoie $S(\mathbb{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de Fourier maîtrisée dans ce cadre. Des exemples de calcul de transformée de Fourier peuvent être données dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de Fourier de la valeur principale. La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telle que, par exemple, l'équation de la chaleur sur R, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés de fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

1 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$

1.1 Définition et premières propriétés

Remarque 1. $(L^1, ||.||_1)$ *est un espace de Banach.*

Définition 2 (Peyrière p25)**.** *[Gasquet et Witomski p128][Candel p352] Transformée de Fourier dans* L^1*.*

Exemple 3 (Gasquet p128 p132)**.** *[Peyrière p26] Indicatrice de* $[a, b]$*,* $exp(-|x|)$*.*

Proposition 4 (Candel p352)**.** $TF(f)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$*.*

Proposition 5 (Candel p352). *Lemme de Riemann-Lebesgue. Donc* $TF(f) \in C_0(\mathbb{R})$.

Proposition 6 (Candel p352). *[Gasquet p129] Linéarité de TF et continuité de* L^1 *dans* $C_0(\mathbb{R})$. *Donner la majoration.*

Remarque 7. *Ou tout d'un coup avec Peyrière p26]*

Proposition 8 (Peyrière p26). *Propriétés de la TF avec parité, translation...*
a) Pour $g(x) = f(x)e^{2i\pi ax}$, *on a* $TF(g)(x) = TF(f)(x-a)$.
b) Pour $g(x) = f(x-a)$, *on a* $TF(g)(x) = TF(f)(x)e^{-2i\pi ax}$.
c) Pour $g(x) = \overline{f(-x)}$, *on a* $TF(g)(x) = TF(x)$.
d)Pour $\lambda > 0$ *et* $g(x) = f(x/\lambda 0)$, *on a* $TF(g)(x) = \lambda TF(f)(\lambda x)$.

Exemple 9. *TF de* $e^{-|x-a|/\lambda}$, *de* $\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$, *de* $\frac{1}{1+(x-\alpha)^2}$.

1.2 Produit de convolution

Définition 10 (Briane Pagès p275). *La convolée pour des fonctions mesurables positives.*

Définition 11 (Briane Pagès p277). *Produit de convolution sous réserve d'existence.*

Proposition 12. *Symétrie si ces quantités sont bien définies.*

Proposition 13 (Briane Pagès p ?). *[Hirsh Lacombe p149] Soient* p, q, r *tels que* $1/p+1/q = 1+1/r$ *alors, si* f *est dans* L^p , g *dans* L^q *alors le produit de convolution est défini presque partout et est dans* L^r : $||f * g||_r \leq ||f||_p||g||_q$.

Remarque 14. *Ainsi le produit de convolution est bien défini sur* $L^1 \times L^1$.

Exemple 15 (Gasquet p146). *Produit de convolution de l'indicatrice de* $[0, 1]$.

Proposition 16 (Hirsh Lacombe p151). L^1 *muni du produit de convolution est une algèbre commutative.*

Théorème 17 (Briane p279). *[OA p116] Soient* $f \in L^p$, $g \in L^q$ *et* p, q *conjugués.* $f * g$ *est uniformément continue, bornée et tend vers* 0.

Proposition 18 (Gasquet p154). *Pour* $f \in L^1$ *et* $g \in C^1$ *telle que* g, g' *sont bornées, alors* $f * g$ *est dérivable et* $(f * g)' = f * (g')$.

Remarque 19. *Le produit de convolution régularise une fonction f en faisant une moyenne pondérée par g des valeurs de f en chaque point.*

Exemple 20. *Pour tout* $t > 0$, *la fonction* $G_t(x) = exp(-x^2/2t)$ *permet de régulariser les fonctions de* $L^1(\mathbb{R})$ *par convolution. (?)*

Proposition 21 (Gasquet p165). *Soit* $f, g \in L^1$. *Alors* $TF(f * g) = TF(f)TF(g)$.

Application 22. L^1 *ne possède pas d'unité pour la convolution.*

Application 23. *Si* $f * f = f$ *dans* L^1 *alors* $f = 0$ *pp.*

1.3 Dérivation et inversion de la transformée de Fourier

Remarque 24. *Une des propriétés remarquables de la transformée de Fourier est d'échanger la dérivation et la multiplication par un monôme.*

Proposition 25 (Gasquet p130). *[Candel p352] Dérivation. Prendre continu par morceaux ?*

Application 26 (Gasquet p137). *Si f est de classe* C^2 *avec* $f, f', f" \in L^1(\mathbb{R})$, *alors* $TF(f) \in L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 27 (Candel p256). *Plus* f *est dérivable avec des dérivées intégrables, plus* $TF(f)$ *décroît rapidement vers* 0 *en l'infini.*

Remarque 28. *Plus f décroît vers* 0 *rapidement en l'infini, plus* $TF(f)$ *est dérivable.*

Application 29 (Gasquet p133). *TF d'une gaussienne.*

Théorème 30 (Candel p360). *[Faraut p132] Inversion de Fourier.*

Remarque 31 (Gasquet p136). *[Candel p361] Une conséquence de ce résultat est que la transformée de Fourier d'une fonction* L^1 *discontinue en un point ne peut pas être intégrable.*

Corollaire 32 (Candel p360). $TF(TF(f))(x) = f(-x)$ *pour pp* x.

Application 33 (Candel p359). *Injectivité de la transformée de Fourier.*

Exemple 34 (Candel p361). *[Gasquet p138] TF de* $\frac{a}{a^2+x^2}$, *TF d'une gaussienne.*

Proposition 35. *Egalité* $FFf(x) = f(-x)$ *en tout point de continuité de* f.

2 Extension de la transformée de Fourier

2.1 Prolongement de la transformation de Fourier à L^2

Théorème 36 (Rudin p226). *Fourier-Plancherel. A chaque fonction* $f \in L_2(\mathbb{R})$, *on peut associer une fonction* $TF(f) \in L^2(\mathbb{R})$ *telle que :*
1) Si f $L^1 \cap L^2$, *alors* $TF(f)$ *est la transformée de Fourier de* f.
2) $\forall f \in L^2$, *on a* $||f||_2 = ||TF(f)||_2$.
3) $f \in L^2 \to TF(f) \in L^2$ *est une isométrie linéaire bijective d'espaces de Hilbert.*

Remarque 37. *On a ainsi un prolongement de la transformée de Fourier de* $L^1 \cap L^2$ *qui est une isométrie linéaire bijective. L'applicaion définie par ce théorème est appelée transformation de Fourier Plancherel.*

Proposition 38 (Gasquet p160). *Pour* $f \in L^2$, *en notant* $\phi_A(t) := \int_{-A}^{A} e^{-ixt}f(x)dx$ *et* $\psi_A(t) := \int_{-A}^{A} TF(f)(t)e^{ixt}dx$, *on trouve :*$\lim_{A\to+\infty} ||\phi_A - f||_2 = 0$ *et* $\lim_{A\to+\infty} ||\psi_A - f|| = 0$.

Remarque 39. *La densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 assure l'unicité de la correspondance entre f et TF dans L^2.*

Proposition 40 (Gasquet p160)**.** *Soient $f, g \in L^2$. $\int f\overline{g} = \int TF(f)\overline{TF(g)}$.*

Proposition 41 (Rudin p227)**.** *Si $f \in L^2$ et $TF \in L^1$ alors $f(x) = \in TF(f)(t)e^{ixt}dt$ pp.*

Exemple 42 (Candel p377)**.** $\sin(2\pi ax)/\pi x$ *est L^2 et pas L^1, calcul de sa TF.*

Application 43 (Bernis)**.** *Calcul de l'intégrale du sinus cardinal.*

2.2 Transformation de Fourier dans $S(\mathbb{R})$

Remarque 44. *Nous allons introduire un sous-espace de L^1 stable par transformation de Fourier, dérivation et multiplication par un polynôme.*

Définition 45 (Gasquet p141)**.** *Fonction à décroissance rapide.*

Proposition 46 (Gasquet p142)**.** *Si $f \in L^1$ est à décroissance rapide, alors $TF(f)$ est indéfiniment dérivable.*

Proposition 47 (Gasquet p142)**.** *Soit f C^∞. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}$ est L^1 alors $TF(f)$ est à décroissance rapide.*

Remarque 48. *La transformée de Fourier échange décroissance à l'infini et régularité. On va définir un espace de fonctions qui sont à la fois très régulières et très décroissantes à l'infini, ce sera commode pour généraliser la transformée de Fourier.*

Définition 49 (Gasquet p141 bof)**.** *[Candel p365] Espace de Schwarz.*

Remarque 50 (Candel p365)**.** *Une fonction de $S(\mathbb{R})$ est dite C^∞ à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées.*

Exemple 51 (Candel p366)**.** *$x \mapsto exp(-ax^2)$ où $a > 0$ est dans $S(R)$ mais pas dans $D(R)$.*

Proposition 52 (Gasquet p142)**.** *S est stable par multiplication par un polynôme.*
S est stable par dérivation.
$S \subset L^1$. (Même dans L^p).

Théorème 53 (Gasquet p142)**.** *S est stable par transformation de Fourier.*

Proposition 54 (Gasquet p143)**.** *Pour tout $(\alpha, \beta) \in N^2$ on pose $p_{\alpha,\beta} = sup\{|x^\alpha f^{(\beta)}(x)|\}$. C'est une famille de semi-normes sur $S(\mathbb{R})$ qui fait de $S(\mathbb{R})$ un espace métrisable complet.*
Pour cette topologie, la dérivation et la transformation de Fourier sont des opérations continues.

Théorème 55 (Gasquet p144)**.** *TF est une application linéaire linéaire et bicontinue de S sur S. Donner l'inverse.*

2.3 Transformation de Fourier dans $S'(\mathbb{R})$

Définition 56 (Gasquet p231)**.** *On définit $S'(\mathbb{R})$ comme l'espace vectoriel des formes linéaires continues de $S(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$ pour les semi-normes $p_{\alpha,\beta}$. $S'(\mathbb{R})$ est appelé l'ensemble des distributions tempérées.*

Définition 57 (Gasquet p234)**.** *Transformée de Fourier d'une distribution tempérée. $TF(T) \in S'(\mathbb{R})$.*

Théorème 58 (Gasquet p235)**.** *TF est une application linéaire bijective et bicontinue de $S'(\mathbb{R})$ sur $S'(\mathbb{R})$. Donner l'inverse.*

Exemple 59 (Gasquet p235)**.** *Transformée de Fourier d'une dirac. Transformée de Fourier de 1. TF de la valeur principale et de la fonction de Heaviside.*

3 Applications en analyse

3.1 Formule sommatoire de Poisson

Proposition 60 (Gourdon p273)**.** *Pour $f \in S(\mathbb{R})$, la série $\sum f(.+n)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{R}$.*

Proposition 61 (Gourdon p273)**.** *De plus, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum f(x+n) = \sum TF(f)(n)e^{2i\pi nx}$. En particulier, $\sum f(n) = \sum TF(f)(n)$.*

Application 62 (Willem p149)**.** *Dans $S'(\mathbb{R})$, on a $\delta_Z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_k = TF(\delta_{\mathbb{Z}})$.*

3.2 Polynômes orthogonaux

Définition 63 (OA p110)**.** *On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que $\forall n, \int_I |x|^n \rho(x)dx \leq +\infty$.*

Définition 64. *On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue. Muni de son produit scalaire $\int_I f(x)g(x)\rho(x)dx$, c'est un espace de Hilbert contenant les fonctions polynômiales.*

Proposition 65. *Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, vérifiant $deg(P_n) = n$, que l'on appelle "famille des polynômes orthogonaux associée à ρ". On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X_n)_n$.*

Exemple 66. *Polynômes de Hermite, de Lagrange, de Chebychev.*

Application 67. *Polynômes de meilleure approximation.*

Théorème 68 (OA p140)**.** *S'il existe $a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx \leq +\infty$, alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.*

3.3 Equation de la chaleur

Proposition 69 (Bernis)**.** *Equation de la chaleur.*

3.4 Fonction caractéristique d'une variable aléatoire

Définition 70 (Ouvrard p195)**.** *Transformée de Fourier. Fonction caractéristique.*

Proposition 71 (Ouvrard p196)**.** *Fonction caractéristique et espérance.*

Exemple 72. *Loi de Poisson, loi à densité.*

Remarque 73. *Si ϕ est à densité, on retrouve la transformée de Fourier habituelle.*

Théorème 74 (Ouvrard p203)**.** *La fonction caractéristique caractérise entièrement la loi par injectivité de la transformée de Fourier.*

Proposition 75 (Ouvrard p205)**.** *Critère d'indépendance.*

Proposition 76 (Ouvrard p207)**.** *Fonction caractéristique de la somme de va.*

Proposition 77 (Ouvrard p209)**.** *Liens entre fonctions caractérisques et moments.*

Proposition 78. *Si deux va bornées ont même moments à tout ordre, elles sont égales.*

Théorème 79. *Théorème de Lévy.*

Application 80. *Théorème central limite.*